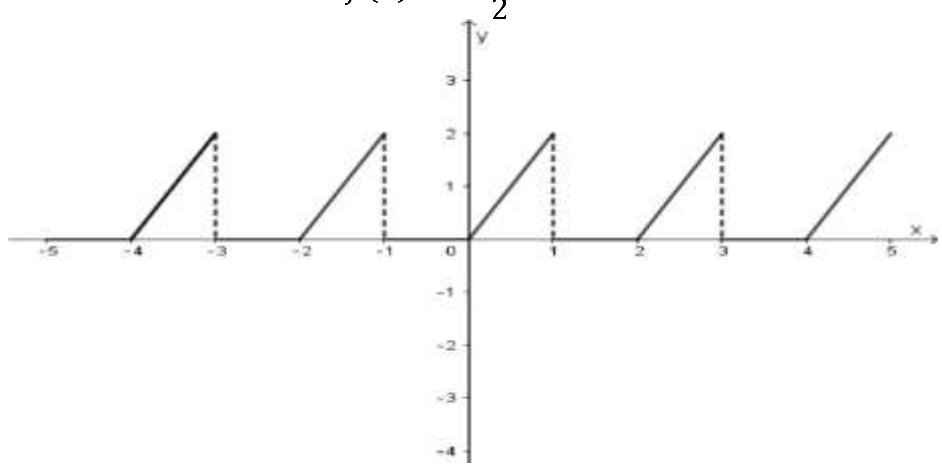
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP. HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐÁP ÁN MÔN TOÁN A1 – HỌC KỲ II NĂM HỌC
2017-2018
Mã môn học: MATH130101
Ngày thi: 01/6/2018

CÂU		**NỘI DUNG**	**ĐIỂM**
1	**a**	Với $z = 1 + \sqrt{3}i = a + bi$. Ta có $$\lvert r\rvert = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$ $$\text{và} \begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$ Khi đó, dạng lượng giác của $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Đặt $w_k = \sqrt[3]{z}$. Số phức z có ba căn bậc 3 xác định bởi $$w_k = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{3}\right)\right], k = \overline{0,2}.$$ $$= \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}\right)\right], k = \overline{0,2}.$$ Vậy với $k = 0$ $$w_0 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right]$$ Với $k = 1$ $$w_0 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right]$$ Với $k = 2$ $$w_0 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{9}\right)\right]$$	0.25 0.25 0.25 0.25
	b	Ta có $$\mathrm{f(x)} = \ln(x-1) = \ln[1 + (x-2)]$$ Đặt $X = x - 2$, ta cần tìm khai triển Maclaurin của hàm số $\ln(1+X)$ đến cấp n. Mặt khác, khai triển Maclaurin của hàm $\ln(1+x)$ là $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^n).$$ Khi đó $$\ln(1+X) = \quad X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} + O(X^n)$$ Vậy khai triển Taylor của $f(x) = \ln(x-1)$ tại $x_0 = 2$ đến cấp n với phần dư Peano là $$\ln(x-1) = x - 2 - \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n} + O((x-2)^4)$$ Ta có hệ số của $(x-2)^{2018}$ là	0.25 0.25 0.25 0.25

		$\displaystyle a_n(x-2)^{2018} = \frac{f^{(2018)}(2)}{2018!}(x-2)^{2018} = \frac{(-1)^{2018-1}}{2018}(x-2)^{2018}.$ Vậy $f^{(2018)}(2) = -2017!$	0.25 0.25
2	**a**	Ta có $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2-2m) = -2m, \quad f(0) = -2m$ $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{-(e^{\sin x}-1)}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x} = -1$ Vậy f liên tục tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ $\displaystyle \Leftrightarrow -2m = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$	0.25 0.25 0.25 0.25
	b	Gọi V_b, V_n lần lượt là thể tích bể và thể tích nước; h_b, h_n lần lượt là chiều cao bể và chiều cao mực nước trong bể. Theo đề bài, ta có thể tích bể chứa $V_b = \pi r^2 h_b = 2\pi r^3 = 100$, (do $h_b = 2r$) Suy ra $\displaystyle r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \approx 2.515\, m$ Thể tích nước $V_n = \pi r^2 h_n$. Khi đó, tốc độ tăng của thể tích nước sẽ là $\displaystyle \frac{dV_n}{dt} = \pi r^2 \frac{d_h}{dt} = 3$ Từ đó, ta suy ra tốc độ tăng của chiều cao mực nước theo thời gian t là $\displaystyle \frac{d_h}{dt} = \frac{dV_n}{dt}.\frac{1}{\pi r^2} = 3.\frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{2500}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2500\pi}} \approx 0.151 \left(\frac{m}{phút}\right).$	0.25 0.25 0.25 0.25
3	**a**	Ta có $\displaystyle I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{x-1}}dx = \lim_{c\to 1^+}\int_c^2 \frac{1}{\sqrt[4]{x-1}}dx.$ Đặt $t = \sqrt[4]{x-1}$, khi đó $t^4 = x - 1$ $4t^3 dt = dx$ Vậy $\displaystyle I = \lim_{c\to 1^+}\int_{\sqrt[4]{c-1}}^1 \frac{4t^3}{t}dt = \lim_{c\to 1^+}\int_{\sqrt[4]{c-1}}^1 4t^2\, dt = \lim_{c\to 1^+}\left(\frac{4}{3}t^3\bigg\vert_{\sqrt[4]{c-1}}^1\right)$ $\displaystyle = \lim_{c\to 1^+}\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{c-1}\right)^3\right) = \frac{4}{3}$	0.25 0.25 0.25 0.25
	b	Đặt $\displaystyle I = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{x^3+x}{\sqrt{(x+1)^8}}dx$ Khi $x \to +\infty$	

		$f(x)=\dfrac{x^3+x}{\sqrt{(x+1)^8}}\sim\dfrac{x^3}{\sqrt{x^8}}=\dfrac{1}{x}$ Chọn $g(x)=\frac{1}{x}$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x}{\sqrt{(x+1)^8}}.x=1$ Mặt khác ta có $\int_1^{+\infty}g(x)dx$ phân kỳ $(p=1)$. Vậy theo tiêu chuẩn so sánh 2, tích phân $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ phân kỳ.	0.25 0.25 0.25 0.25
4	**a**	Đặt $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n+n}{n^2 2^n}.$ Khi $n\to+\infty$ $a_n\sim\dfrac{2^n}{n^2 2^n}=\dfrac{1}{n^2}=b_n$ Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+n}{n^2 2^n}.n^2=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{n}{2^n}\right)=1+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2^n}=1.$ Mặt khác chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ hội tụ do $p=2>1$. Vậy theo tiêu chuẩn so sánh 2, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ hội tụ.	0.25 0.25 0.25 0.25
	b	Đặt $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nX^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n n^2}(x+1)^n$ trong đó $a_n=\dfrac{1}{3^n n^2}$ và $X=x+1$ Ta xét $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\dfrac{1}{3^{n+1}(n+1)^2}.3^n n^2\right\|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{3(n^2+2n+1)}=\dfrac{1}{3}$ Khi đó bán kính hội tụ $R=3$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nX^n$ hội tụ với mọi $X\in(-3,3)$. Tại $X=-3$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nX^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n}{3^n n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ là chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz $\left(\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2},\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0\right)$. Tại $X=3$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nX^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n}{3^n n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ là chuỗi hội tụ do $p=2>1$. Khi đó, miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nX^n$ là $[-3,3]$. Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n n^2}(x+1)^n$ là $[-4,2]$.	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25

	c	Ta có chu kỳ $T = 2L = 2$, suy ra $L = 1$. Khi đó $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2xdx = x^2\|_0^1 = 1.$ $a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\, dx = 2\int_{0}^{1} x\cos n\pi x\, dx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos n\pi x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{n\pi}\sin n\pi x \end{cases}$ Khi đó: $a_n = \dfrac{2x}{n\pi}\sin n\pi x\Big\|_0^1 - \dfrac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x dx = \dfrac{2\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\Big\|_0^1 = \dfrac{2(-1)^n - 2}{(n\pi)^2}$ $= \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 2k, \forall k \in \boldsymbol{Z} \\ \dfrac{-4}{(n\pi)^2} & \text{nếu } n = 2k+1, \forall k \in \boldsymbol{Z} \end{cases}$	0.25 0.25
		Tương tự $b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\, dx = 2\int_0^1 x\sin n\pi x\, dx.$ $= \dfrac{-2x}{n\pi}\cos n\pi x\Big\|_0^1 + \dfrac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x dx = \dfrac{-2x\cos n\pi x}{n\pi}\Big\|_0^1 + \dfrac{2}{(n\pi)^2}\sin n\pi x\Big\|_0^1$ $= \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} = \begin{cases} \dfrac{-2}{n\pi}, & \text{nếu } n = 2k, k \in \boldsymbol{Z}. \\ \dfrac{2}{n\pi}, & \text{nếu } n = 2k+1, k \in \boldsymbol{Z} \end{cases}$	0.25
		Tại những điểm $x \neq 2k+1, k \in \boldsymbol{Z}$, ta có khai triển Fourier của hàm f như sau $f(x) = \dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2(-1)^n - 2}{(n\pi)^2}\cos n\pi x + \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x\right)$ Tại những điểm $x = 2k+1, k \in \boldsymbol{Z}$, ta có $f(x) = \dfrac{2+0}{2} = 1$ 	0.25